Problemas propuestos

15. Hallar el área limitada por las curvas y rectas que se indican:

(*a*) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 5$
(*b*) $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$
(*c*) $y = 4x - x^2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$
(*d*) $x = 1 + y^2$, $x = 10$
(*e*) $x = 3y^2 - 9$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$
(*f*) $x = y^2 + 4y$, $x = 0$
(*g*) $y = 9 - x^2$, $y = x + 3$
(*h*) $y = 2 - x^2$, $y = -x$
(*i*) $y = x^2 - 4$, $y = 8 - 2x^2$
(*j*) $y = x^4 - 4x^2$, $y = 4x^2$
(*k*) La curva dada por $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$
(*l*) La curva dada por $9ay^2 = x(3a - x)^2$
(*m*) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 0$, $x = 2$
(*n*) $y = e^{x/a} + e^{-x/a}$, $y = 0$, $x = \pm a$
(*o*) $xy = 12$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e^2$
(*p*) $y = 1/(1 + x^2)$, $y = 0$, $x = \pm 1$
(*q*) $y = \operatorname{tag} x$, $x = 0$, $x = \frac{1}{4}\pi$
(*r*) Un sector circular de radio r y ángulo α.
(*s*) La elipse $x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$.
(*t*) $x = 2 \cos \theta - \cos 2\theta - 1$, $y = 2 \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} 2\theta$.
(*u*) $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$.
(*v*) Primer arco de $y = e^{-ax} \operatorname{sen} ax$.
(*w*) $y = xe^{-x^2}$, $y = 0$, y la ordenada máxima.
(*x*) Las dos ramas de $(2x - y)^2 = x^3$ y $x = 4$.
(*y*) Dentro de $y = 25 - x^2$, $256x = 3y^2$, $16y = 9x^2$.

Soluciones: (*a*) 39 unidades de superficie, (*b*) 20, (*c*) 22/3, (*d*) 36, (*e*) 8, (*f*) 32/3, (*g*) 125/6, (*h*) 9/2, (*i*) 32, (*j*) $512\sqrt{2}/15$, (*k*) $2a^3/3$, (*l*) $8\sqrt{3}a^2/5$, (*m*) $(e^2 + 1/e^2 - 2)$, (*n*) $2a(e - 1/e)$, (*o*) 24, (*p*) $\frac{1}{2}\pi$, (*q*) $\frac{1}{2} \ln 2$, (*r*) $\frac{1}{2}r^2\alpha$, (*s*) πab, (*t*) 6π, (*u*) $3\pi a^2/8$, (*v*) $(1 + 1/e^{\pi})/2a$, (*w*) $\frac{1}{2}(1 - 1/\sqrt{e})$, (*x*) 128/5, (*y*) 98/3 unidades de superficie.

La *ordenada media* de la curva $y = f(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq b$ viene dada por

$$\frac{\text{Area}}{\text{Base}} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b - a}$$

16. Hallar la ordenada de (*a*) una semicircunferencia, (*b*) la parábola $y = 4 - x^2$ desde $x = -2$ hasta $x = 2$.

Sol. (*a*) $\pi r/4$, (*b*) 8/3.

17. (*a*) Hallar la ordenada media de un arco de la cicloide $x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ con respecto a x.

(*b*) Idem, con respecto a θ.

Sol. (*a*) $\dfrac{1}{2\pi a}\displaystyle\int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos\theta)^2\,d\theta = \dfrac{3a}{2}$, (*b*) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} a(1 - \cos\theta)\,d\theta = a$

18. En la caída libre de un cuerpo, $s = \frac{1}{2}gt^2$ y $v = gt = \sqrt{2gs}$.

(*a*) Demostrar que el valor medio de v con respecto a t en el intervalo $0 \leq t \leq t_1$ es igual a la mitad de la velocidad final.

(*b*) Demostrar que el valor medio de v con respecto a s en el intervalo $0 \leq s \leq s_1$ es igual a dos tercios de la velocidad final.